

Problem 1: Integration rationaler Funktionen

(a) $f(x) = \frac{x+2}{x^3-3x^2-x+3}$

Faktorisierung des Nenners:

$$x^3 - 3x^2 - x + 3 = (x-1)(x+1)(x-3)$$

Partialbruchzerlegung:

$$\frac{x+2}{(x-1)(x+1)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-3}$$

$$A = -\frac{3}{4}, B = \frac{1}{8}, C = \frac{5}{8}$$

Stammfunktion:

$$F(x) = -\frac{3}{4} \ln|x-1| + \frac{1}{8} \ln|x+1| + \frac{5}{8} \ln|x-3| + C$$

—

(b) $f(x) = \frac{x^6}{x^4+3x^2+2}$

Polynomdivision:

$$\frac{x^6}{x^4+3x^2+2} = x^2 - 3 + \frac{7x^2+6}{(x^2+1)(x^2+2)}$$

Partialbruchzerlegung des Restes:

$$\frac{7x^2+6}{(x^2+1)(x^2+2)} = \frac{8}{x^2+2} - \frac{1}{x^2+1}$$

Stammfunktion:

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x - \arctan(x) + 4\sqrt{2} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C$$

Problem 3: Eigenwerte

(a) Berechnung der Eigenwerte

(i) $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

Charakteristisches Polynom (Entwicklung nach der 3. Spalte):

$$p(\lambda) = (-2 - \lambda) \det \begin{pmatrix} 3 - \lambda & -1 \\ 3 & -1 - \lambda \end{pmatrix}$$

$$p(\lambda) = (-2 - \lambda)(\lambda^2 - 2\lambda) = -\lambda(\lambda - 2)(\lambda + 2)$$

Eigenwerte: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -2$

(ii) $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Charakteristisches Polynom (Entwicklung nach der 2. Spalte):

$$p(\lambda) = (-\lambda) \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & -1 \\ 1 & 1 - \lambda \end{pmatrix}$$

$$p(\lambda) = -\lambda(\lambda^2 - 2\lambda + 2)$$

Nullstellen via pq -Formel: $\lambda = 1 \pm \sqrt{-1}$ **Eigenwerte:** $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1 + i, \lambda_3 = 1 - i$

—

(b) Beweis: Eigenwerte von AB und BA

Sei $\lambda \neq 0$ ein Eigenwert von AB . Dann existiert ein Eigenvektor $v \neq 0$, sodass:

$$(AB)v = \lambda v$$

Multiplikation von links mit B :

$$B(ABv) = B(\lambda v)$$

$$(BA)(Bv) = \lambda(Bv)$$

Da $\lambda \neq 0$ und $v \neq 0$, ist $Bv \neq 0$. Somit ist Bv ein Eigenvektor von BA zum Eigenwert λ . $\square$