

Problem 2

(a)

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)+n}{3n+1} = \frac{\frac{\sin(nx)}{n}+1}{3+\frac{1}{n}} \text{ Da } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(nx)}{n} = 0, \text{ ist der punktweise Grenzwert: } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \frac{0+1}{3+0} = \frac{1}{3}$$

(b)

Zu zeigen: $f_n(x) = \frac{nx}{nx^2+1}$ konvergiert auf $[r, 1)$ mit $r > 0$ gleichmäßig gegen $f(x) = \frac{1}{x}$. $|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{nx}{nx^2+1} - \frac{1}{x} \right| = \left| \frac{nx^2 - (nx^2+1)}{x(nx^2+1)} \right| = \frac{1}{nx^3+x}$ Da $x \geq r > 0$, gilt $nx^3 + x > nr^3$. Daraus folgt für das Supremum: $\sup_{x \in [r, 1)} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{nr^3}$ Wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nr^3} = 0$ konvergiert die Funktionenfolge gleichmäßig.

Problem 3

Sei $\mathcal{E} = (\mathbf{m}_0, \mathbf{m}_1)$ die Standardbasis. Die Basiswechselmatrizen von $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ in $\mathcal{E}$ sind: $M_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $M_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Der Koordinatenvektor von $\mathbf{p} = \mathbf{m}_0 + \mathbf{m}_1$ in $\mathcal{E}$ ist $\mathbf{p}^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a)

$$\mathbf{p}^{\mathcal{B}} = M_{\mathcal{B}}^{-1} \mathbf{p}^{\mathcal{E}} = \frac{1}{3-6} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

(b)

$$T_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} = M_{\mathcal{C}}^{-1} M_{\mathcal{B}} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} \\ 3 & 1 \end{pmatrix} T_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}} = (T_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}})^{-1} = \frac{1}{0-\frac{3}{4}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{4} \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = -\frac{4}{3} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{4} \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

(c)

$$\mathbf{p}^{\mathcal{C}} = T_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} \mathbf{p}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$