

Problem 1

(a)

Punktweiser Grenzwert für $x \in (0, \infty)$:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{1 + nx} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{n} + x} = \frac{1}{x}$$

(b)

Zu prüfen ist, ob $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = 0$ gilt. Die Differenz lautet:

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{x^2 + n^2 x}{n^2} - x \right| = \frac{x^2}{n^2}$$

Das Supremum auf ganz $\mathbb{R}$ ist für jedes n unendlich:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{x^2}{n^2} = \infty$$

Die Konvergenz ist somit nicht gleichmäßig.

Problem 4

(a)

A ist symmetrisch ($A^T = A$). Für die positive Definitheit prüfen wir die Hauptminoren nach Sylvester:

- $D_1 = 1 > 0$
- $D_2 = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 > 0$
- $D_3 = 1 \cdot (5 - 4) = 1 > 0$
- $D_4 = 3 \cdot D_3 = 3 > 0$

Da alle Hauptminoren positiv sind, ist A positiv definit und definiert ein Skalarprodukt.

(b)

Ansatz für die Projektion p : $p = Xc$ mit $X = (u_1, u_2)$ und $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$. Normalengleichung:
 $X^T A X c = X^T A v$.

Berechnung der Gramschen Matrix $X^T A X$:

$$X^T A X = \begin{pmatrix} u_1^T A u_1 & u_1^T A u_2 \\ u_2^T A u_1 & u_2^T A u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Berechnung der rechten Seite $X^T A v$:

$$A v = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$X^T A v = \begin{pmatrix} u_1^T A v \\ u_2^T A v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lösen des LGS:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aus der 2. Zeile folgt $c_1 = -2c_2$. Eingesetzt in die 1. Zeile ergibt $4(-2c_2) + c_2 = 8 \Leftrightarrow -7c_2 = 8 \Leftrightarrow c_2 = -\frac{8}{7}$. Damit ist $c_1 = \frac{16}{7}$.

Einsetzen in p :

$$p = c_1 u_1 + c_2 u_2 = \frac{16}{7} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{8}{7} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{7} \\ -\frac{8}{7} \\ 0 \\ \frac{16}{7} \end{pmatrix}$$