

Hausaufgabenblatt 1 zur Vorlesung Mathematik II (Sommersemester 2026)



Abgabe: Geben Sie Ihre Lösungen zu den **Problemen 1 und 2** bis spätestens Sonntag, den **19. April**, um 23:59 Uhr über **abGabi** ab. Nur eines dieser beiden Probleme wird von uns ausgewählt, korrigiert und bewertet. Wir empfehlen Ihnen eindringlich, **zu zweit abzugeben**. Geben Sie bitte die Namen und Matrikelnummern beider Personen auf der Abgabe an. Pro Zweiergruppe darf nur eine Person die Bearbeitung einreichen, die erreichten Punkte werden jedoch auch der anderen Person gutgeschrieben.

Problem 1 *Stammfunktionen*

Bestimmen Sie die folgenden unbestimmten Integrale:

(a) $\int x^2 \exp(x^3) \, dx$

(b) $\int \frac{\ln(x^2)}{x^2} \, dx$

(c) $\int \frac{1}{2} (\sin(2x) + 1) \, dx$

Problem 2 *Integrale und Stammfunktionen*

Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale:

(a) $\int \frac{2x^2 - 3x + 4}{x} \, dx$

(b) $\int \frac{2 \cos(x)}{1 + \sin(x)} \, dx$

(c) $\int \exp(2x) \sqrt{1 + \exp(2x)} \, dx$

Problem 3 *Komplexe Zahlen*

(a) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil folgender komplexer Zahlen:

(i) $\frac{2 + 4i}{1 + i}$ (ii) $(1 + i)^{16}$

(b) Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $z^3 = 1 + i$ und skizzieren Sie diese in der Gauß'schen Zahlenebene. (Es genügt, die Lösungen in Exponentialform anzugeben.)

(c) Bestimmen Sie einen Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^2$, so dass die folgende Gleichung erfüllt ist:

$$\begin{pmatrix} 1 + i & 1 - 2i \\ 2 + 4i & 3 + i \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -2 + 7i \\ -3 + 9i \end{pmatrix}.$$

Problem 4 *Eigenwerte*

- (a) Seien
- $a, b \in \mathbb{R}$
- ,

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}, \quad \mathbf{v}_{\pm} := \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2.$$

Zeigen Sie, dass die beiden Vektoren $\mathbf{v}_{\pm}$ Eigenvektoren von $\mathbf{A}$ sind. Welches sind die entsprechenden beiden Eigenwerte $\lambda_{\pm}$?

- (b) Eine Matrix
- $\mathbf{Z} \in \mathbb{C}^{n \times n}$
- wird
- Zirkulante*
- genannt, wenn die nächste Spalte aus der vorhergehenden Spalte durch Verschiebung der ersten
- $n - 1$
- Elemente nach unten und Einfügen des letzten Elements an erster Stelle entsteht, zum Beispiel

$$\mathbf{Z}_3 := \begin{pmatrix} c_1 & c_3 & c_2 \\ c_2 & c_1 & c_3 \\ c_3 & c_2 & c_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3 \times 3}.$$

Zeigen Sie, dass der Vektor $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^n$ aus lauter Einsen ein Eigenvektor jeder Zirkulante ist. Welches ist der entsprechende Eigenwert? Geben Sie einen Beweis für allgemeine $n \in \mathbb{N}$.

- (c) Eine quadratische Matrix
- $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{n \times n}$
- heißt
- zeilenstochastisch*
- , wenn die Einträge nichtnegativ sind und die Summe der Elemente in jeder Zeile Eins ist. Zeigen Sie, dass diese Matrizen den Eigenwert
- $\lambda = 1$
- haben, indem Sie einen passenden Eigenvektor
- $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$
- finden.