

Hausaufgabenblatt 2 zur Vorlesung Mathematik II (Sommersemester 2026)



Abgabe: Geben Sie Ihre Lösungen zu den **Problemen 1 und 3** bis spätestens Sonntag, den **26. April**, um 23:59 Uhr über **abGabi** ab. Nur eines dieser beiden Probleme wird von uns ausgewählt, korrigiert und bewertet. Wir empfehlen Ihnen eindringlich, **zu zweit abzugeben**. Geben Sie bitte die Namen und Matrikelnummern beider Personen auf der Abgabe an. Pro Zweiergruppe darf nur eine Person die Bearbeitung einreichen, die erreichten Punkte werden jedoch auch der anderen Person gutgeschrieben.

Problem 1 *Integration rationaler Funktionen*

Bestimmen Sie Stammfunktionen der folgenden rationalen Funktionen $f = \frac{p}{q}: \{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\} \rightarrow \mathbb{R}$.

(a) $f(x) := \frac{x+2}{x^3-3x^2-x+3},$

(b) $f(x) := \frac{x^6}{x^4+3x^2+2}.$

Problem 2 *Integration rationaler Funktionen*

Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale:

(a) $\int \frac{1}{x^2-4} dx,$

(b) $\int \frac{x-2}{x^2-6x+5} dx,$

(c) $\int \frac{7x^2-36x+21}{(x-1)^2(x^2-9)} dx$

Problem 3

(a) Berechnen Sie alle Eigenwerte der Matrizen

$$(i) \quad \mathbf{A}_1 := \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad (ii) \quad \mathbf{A}_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Es werden komplexe Zahlen benötigt.

(b) Es seien $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$ und $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{n \times m}$ gegeben. Zeigen Sie, dass jeder von Null verschiedene Eigenwert von $\mathbf{AB}$ auch ein Eigenwert von $\mathbf{BA}$ ist.¹

Problem 4 *Schnitt von Eigenräumen*

Gegeben seien eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ und Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ von $\mathbf{A}$ mit $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Des Weiteren sei mit $\text{Eig}(\lambda)$ der Eigenraum eines beliebigen Eigenwerts λ bezeichnet. Beweisen Sie, dass

$$\text{Eig}(\lambda_1) \cap \text{Eig}(\lambda_2) = \{\mathbf{0}\}.$$

¹ Tipp: Ein Beweis könnte wie folgt starten: Es sei $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ein Eigenwert von $\mathbf{AB}$ und es sei $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^m$ ein zugehöriger Eigenvektor. Für den Vektor $\mathbf{w} = \mathbf{Bv}$ gilt dann ...