

Problem 2

(a)

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx) + n}{3n + 1} = \frac{\frac{\sin(nx)}{n} + 1}{3 + \frac{1}{n}}$$

Da

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(nx)}{n} = 0$$

, ist der punktweise Grenzwert:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \frac{0 + 1}{3 + 0} = \frac{1}{3}$$

(b)

Zu zeigen:

$$f_n(x) = \frac{nx}{nx^2 + 1}$$

konvergiert auf

$$[r, 1)$$

mit

$$r > 0$$

gleichmäßig gegen

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

.

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{nx}{nx^2 + 1} - \frac{1}{x} \right| = \left| \frac{nx^2 - (nx^2 + 1)}{x(nx^2 + 1)} \right| = \frac{1}{nx^3 + x}$$

Da

$$x \geq r > 0$$

, gilt

$$nx^3 + x > nr^3$$

. Daraus folgt für das Supremum:

$$\sup_{x \in [r, 1)} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{nr^3}$$

Wegen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nr^3} = 0$$

konvergiert die Funktionenfolge gleichmäßig.

Problem 3

Sei

$$\mathcal{E} = (\mathbf{m}_0, \mathbf{m}_1)$$

die Standardbasis. Die Basiswechselmatrizen von

$$\mathcal{B}$$

und

$$\mathcal{C}$$

in

$$\mathcal{E}$$

sind:

$$M_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Der Koordinatenvektor von

$$\mathbf{p} = \mathbf{m}_0 + \mathbf{m}_1$$

in

$$\mathcal{E}$$

ist

$$\mathbf{p}^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

.

(a)

$$\mathbf{p}^{\mathcal{B}} = M_{\mathcal{B}}^{-1} \mathbf{p}^{\mathcal{E}} = \frac{1}{3-6} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

(b)

$$T_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} = M_{\mathcal{C}}^{-1} M_{\mathcal{B}} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}} = (T_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}})^{-1} = \frac{1}{0 - \frac{3}{4}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{4} \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = -\frac{4}{3} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{4} \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

(c)

$$\mathbf{p}^{\mathcal{C}} = T_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} \mathbf{p}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$